

استاد: شیرین تقی

درس: آمار و کاربرد آن در حسابداری

رشته: حسابداری

مقطع: کارشناسی

ترم: دوم

توضیح فصل اول در جلسه اول، دوم، سوم از صفحی یک تا هفت

تعریف: آمار: به نحوی گزینش داده‌ها، سازمان دهی و تحلیل و تفسیر آمار برای استخراج اطلاعات و تصمیم گیری گفته می‌شود.

تعریف: متغیر تصادفی گسسته: متغیر تصادفی که فقط مقادیر مجزا را اختیار می‌کند.

مثال: تعداد شیرهای ظاهر شده در پرتاب سه سکه:

حل: فضای نمونه: تمام حالات ممکن در پرتاب سه سکه

$$S = \{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, T, T), (H, H, H)\}$$

$n(S) = 8$ تعداد اعضای فضای نمونه

$A = \{(H, H, H), (T, H, H), (T, H, T), (H, T, T), (T, T, H), (H, H, T)\}$
 (ظواهر شدن شیر در پرتاب سه سکه)
 فضای پیام: تمام حالات مطلوب

$n(A) = 6$ تعداد اعضای پیام

احتمال پیام A $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{8}$

X : متغیر تصادفی: ظاهر شدن شیر در پرتاب سه سکه	شیر ظاهر شود ۰ (T, T, T)	یک شیر ظاهر شود ۱ (T, T, H) (H, T, T) (T, H, T)	دو شیر ظاهر شود ۲ (T, H, H) (H, T, H) (H, H, T)	سه شیر ظاهر شود ۳ (H, H, H)
$P(X=x) = f_X(x)$ احتمال تفسیر تصادفی X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مجموع احتمالات برابر عدد یک است

$$P(X=x) = \sum f_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

تعریف: متغیر تصادفی پیوسته: متغیر تصادفی که مقادیر موجود در یک بازه را اختیار می‌کند.

مثال: مدت زمان لازم برای انجام کاری معین در یک شرکت

(مثلاً کارمندی در یک شرکت ساعت یک تا سه باید رزومهای تهیه کند تا برای بازرس مربوطه توفیق دهد)

سوال: حاصل انتگرال $\int_1^3 e^{4x} dx$ را بیابید.

حل: متغیر تصادفی مورد نظر متغیر تصادفی پیوسته است زیرا روی بازه $\mathbb{R}$ متغیر می‌شود.

یادآوری: $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$ و همچنین $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$\int_1^3 e^{4x} dx = \left[\frac{1}{4} e^{4x} \right]_1^3 = \frac{1}{4} e^{4(3)} - \frac{1}{4} e^{4(1)} = \frac{1}{4} e^{12} - \frac{1}{4} e^4 = \frac{1}{4} (e^{12} - e^4)$$

تذکره: در این فصل توزیع‌های بزرگسالی، دو جمله‌ای، بواسون، فوق هندسی از توزیع احتمال‌های گسسته و

توزیع‌های کنتinuیت، نرمال، نمایی، زردال از توزیع احتمال‌های پیوسته را توضیح می‌دهیم.

تعریف: توزیع بزرگسالی: آزمائشی را در نظر بگیرید که به تکرار انجام شود و نتایج دارای دو نتیجه است: موفقیت با احتمال p و شکست با احتمال $q = 1 - p$ است.

اگر X را متغیر تصادفی بزرگسالی در نظر بگیریم، ران تعداد موفقیت در n آزمایش (توزیع دهم دارم) $S_X = \{0, 1, \dots, n\}$ (تمام حالات ممکن یا صفر تا n) (مست) یا موفقیت است (تک).

منظور از نماد $X \sim B(n, p)$ را توضیح می‌دهیم (X متغیر تصادفی بزرگسالی است با احتمال موفقیت p و

عدد n به معنای تعداد آزمایش است).

$X = x$ متغیر تصادفی بزرگسالی	۰ (شکست)	۱ (موفقیت)
$f_X(x) = P(X=x)$ تابع احتمال متغیر تصادفی بزرگسالی	$q = 1 - p$	p

$$f_X(x) = p^x q^{1-x}$$

$x = 0, 1, \dots, n$

به طور کلی تابع احتمال توزیع بزرگسالی عبارتست از:

صفحه دو

فرضه: اگر $X \sim B(1, p)$ (X دارای توزیع بزرگ با پارامتر p (احتمال موفقیت p) است) آنگاه داریم

$$E(X) = p \quad (\text{امید ریاضی}) \quad \text{و} \quad \text{Var}(X) = pq \quad (\text{واریانس})$$

درجول

$$E(X) = \sum_{n=0}^1 n f_X(n) = 0 f_X(0) + 1 f_X(1) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

امید ریاضی $E(X)$ برابر با مجموع n ضرب در $f_X(n)$ است.
 احتمال موفقیت p و احتمال شکست $1-p$
 به جای n مقدار 0 و به جای $f_X(n)$ مقدار $(1-p)$ و p قرار می‌دهیم.

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^1 n^2 f_X(n) = 0^2 f_X(0) + 1^2 f_X(1) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$$

تغارت با n^2 در آن است به جای n مقدار 0 و 1 قرار می‌دهیم.
 احتمال موفقیت p و احتمال شکست $1-p$
 به جای n^2 مقدار 0 و به جای $f_X(n)$ مقدار $(1-p)$ و p قرار می‌دهیم.

درجول

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - (p)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

واریانس $\text{Var}(X)$ برابر با $p(1-p)$ است.
 فاکتور از عامل مشترک p باقی‌مانده $1-p$ است.

مثال: در یک بازی بلیارد سه شعله هدفی می‌باشد $E(X)$ و $\text{Var}(X)$
 حل: در یک بازی بلیارد سه شعله هدفی می‌باشد با درستی ظاهر شدن سیر H (موفقیت) با احتمال $p = \frac{1}{4}$

و ظاهر شدن خط T (شکست) با احتمال $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

X : متغیر تصادفی بزرگ: با موفقیت (ظاهر شدن سیر H در یک بازی بلیارد سه شعله)
 شکست (ظاهر شدن خط T)
 $S_X = \{0, 1\}$
 موفقیت (ظاهر شدن سیر H)
 شکست (ظاهر شدن خط T)

X متغیر تصادفی بزرگ	ظاهر شدن خط T	ظاهر شدن سیر H
$f_X(n) = P(X=n)$ احتمال	$q = \frac{3}{4}$	$p = \frac{1}{4}$

$$E(X) = p = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}(X) = pq = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

صفتی سه

مثال: درختیاب یک تاس شش‌وجهی محاسبه $E(X)$ و $Var(X)$.

حل: درختیاب تاس را می‌توان با لحاظ کردن این شرط که ظاهر شدن عدد ۴ مورد نظر است یک آزمون دوتایی

تلقی کرد. محاسبه آزمون است با فرضیه: ظاهر شدن عدد ۴ (موفقیت) با احتمال $p = \frac{1}{6}$ و

ظاهر شدن سایر اعداد درختیاب تاس (شکست) با احتمال $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

توضیح: حاشیه: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضای نمونه تاس

$A = \{4\}$ ظاهر شدن عدد ۴ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

$B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ ظاهر شدن سایر اعداد $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{6}$

آزمون دوتایی (تاس) $X \sim B(1, \frac{1}{6})$

X : متغیر تصادفی دوتایی. مشاهده عدد ۴ درختیاب تاس با احتمال $p = \frac{1}{6}$ است $\leftarrow$

$X=n$	ظاهر شدن عدد ۴ (موفقیت)	ظاهر شدن سایر اعداد (شکست)
0	ظاهر شدن عدد ۴ (موفقیت)	ظاهر شدن سایر اعداد (شکست)
1	ظاهر شدن سایر اعداد (شکست)	ظاهر شدن عدد ۴ (موفقیت)
$P(X=n) = f_X(n)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$S_X = \{0, 1\}$ $\leftarrow$
ظاهر شدن عدد ۴ (موفقیت) $\downarrow$
ظاهر شدن سایر اعداد (شکست) $\downarrow$

$$f_X(n) = p^n q^{1-n} \quad (n=0, 1) \rightarrow f_X(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{1-n} \quad (n=0, 1)$$

$$E(X) = p = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad Var(X) = pq = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

تعریف: توزیع دووجهی: آزمون که از انجام n بار آزمون دوتایی مستقل به وجود می‌آید

تعریف: X متغیر تصادفی دووجهی در این صورت X نامیده می‌شود با تعداد موفقیت‌ها در n بار آزمون دوتایی مستقل

نماد $X \sim B(n, p)$ یعنی X دارای توزیع دووجهی با پارامترهای n و p است
(n : تعداد آزمون‌های مستقل دوتایی و p : احتمال موفقیت)

$$f_X(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

توضیح: اگر در تعداد بلعیم سکه‌ای را ده مرتبه پرتاب کنیم چون سکه دووجهی ظاهر شدن H یا T را در این یک آزمون دوتایی است

حالا اگر ده بار (n بار) انجام دهیم که هر بار سکه متفاوتی دارد (مستقل از هم انجام می‌دهیم) پس یک آزمون دووجهی است

متغیر تصادفی

تفسیر: اگر $X \sim B(n, p)$ (X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و p است) n آزمایش مستقل و p احتمال موفقیت است.

$E(X) = np$ (امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای) و $Var(X) = npq$ (واریانس توزیع دوجمله‌ای)

اثبات: اگر X متغیر تصادفی دوجمله‌ای به n آزمایش با تعداد موفقیت X در n آزمایش مستقل و p داریم

$$X = \underbrace{X_1}_{\substack{\text{توزیع دوجمله‌ای} \\ \text{در آزمایش اول}}} + \underbrace{X_2}_{\substack{\text{توزیع دوجمله‌ای} \\ \text{در آزمایش دوم}}} + \underbrace{X_3}_{\substack{\text{توزیع دوجمله‌ای} \\ \text{در آزمایش سوم}}} + \dots + \underbrace{X_n}_{\substack{\text{توزیع دوجمله‌ای} \\ \text{در آزمایش nام}}}$$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n)$
 امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای

$\rightarrow E(X) = p + p + p + \dots + p = np$
 تعداد p در n

$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + \dots + Var(X_n)$
 واریانس توزیع دوجمله‌ای واریانس توزیع دوجمله‌ای واریانس توزیع دوجمله‌ای واریانس توزیع دوجمله‌ای

$\rightarrow Var(X) = pq + pq + pq + \dots + pq = npq$
 تعداد pq در n

فرمول ترکیبی $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

یادآوری: علامت فاکتوریل است
 نکته: $1! = 1$ و $0! = 1$

① $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{1 \times (n-1)!} = \frac{n}{1} = n$

- لغت این مورد را خاطر بخارید

② $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$

مثال $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$
 $= \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$
 $= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

③ $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$

④ $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)! \times 1} = \frac{n}{1} = n$

مثال: تعداد شانس مساعده نشود در آن دو طرفه است را ۴ مرتبه تیرا می کشیم
 X : تعداد شانس ظاهر شده در ۴ مرتبه تیرا که باشد متغیر تصادفی (i) نام احتمال X (ii) $P(X=3)$
 حل: اگر شانس متغیر تصادفی است این دلیل بر اینست که با دو طرفه تیرا ۴ مرتبه انجام شده
 و با دو طرفه ظاهر شدن شانس پس X متغیر تصادفی دو طرفه است را تعداد ظاهر شدن شانس در ۴ بار تیرا که باشد متغیر تصادفی
 تعریف کنیم یعنی $X \sim B(n, p) \leftarrow X \sim B(4, \frac{1}{3})$

X : متغیر تصادفی دو طرفه	ظاهر شدن شانس T	ظاهر شدن شانس H	$n=4$ $p=\frac{1}{3}$ $q=\frac{2}{3}$
$f_X(n) = P(X=n)$ نام احتمال متغیر تصادفی دو طرفه	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	دلیل:

H شانس	T ظاهر شدن شانس	در هر بار تیرا $P(H) = \frac{1}{3}$ است
۰	۱	$\frac{1}{3}$
۱	۲	$\frac{2}{3}$
۲	۳	$\frac{1}{3}$
۳	۴	$\frac{2}{3}$
۴	۵	$\frac{1}{3}$

صورت مسئله توضیح داد شانس ظاهر شدن دو طرفه است یعنی

$P(H) = \frac{1}{3}$ (احتمال شانس ظاهر شدن)
 $P(H) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (سادگی)
 $P(H) = \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$ (سادگی)

i) $f_X(n) = \binom{n}{n} p^n q^{n-n} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots, n$
 $f_X(n) = \binom{4}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{4-n} \quad n=0, 1, 2, 3, 4$
 نام احتمال متغیر تصادفی دو طرفه: تعداد ظاهر شدن شانس در ۴ بار تیرا که باشد

ii) $P(X=3) = f_X(3) = \binom{4}{3} p^3 q^{4-3} \rightarrow \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}$
 $= \frac{4!}{3!(4-3)!} \times \frac{1^3}{3^3} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} \times \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81} = 0.098$

مثال: یک تیرا کشید قطعات، اجناس خود را در تیراها ۲۰ تایی برای مصرف کنندگان می فرستد. فرض کنید هر قطعه دو طرفه تیرا کشیده را یا معیوب است یا سالم. احتمال معیوب بودن هر قطعه ۰.۵ است (i) به طور متوسط در هر تیرا چند قطعه معیوب وجود دارد

ii) احتمال آنکه در تیراها ۲۰ تایی هیچ قطعه معیوبی نباشد
 حل: اگر شانس فوق معیوب است و اگر اجناس به دو طرفه سالم یا معیوب باشد در تیراها ۲۰ تایی با احتمال $p=0.5$
 $X \sim B(n, p) \leftarrow p=0.5$
 $X \sim B(20, 0.5)$
 و X : متغیر تصادفی دو طرفه = تعداد قطعه های معیوب در تیراها ۲۰ تایی با احتمال $p=0.5$
 i) $E(X) = np = 20 \times 0.5 = 10$
 ii) $P(X=0) = \binom{20}{0} (0.5)^0 (0.5)^{20} = 1 \times 1 \times (0.5)^{20} = 0.00000095367431640625$

مثال: یک تاس را ۵ بار پرتاب کنیم (i) احتمال آنکه عدد ۳ دقیقاً ۳ بار ظاهر شود (ii) احتمال آنکه عدد ۴ حداکثر ۲ بار ظاهر شود
 حل: آزمایش مورد نظر یک دوجمله‌ای است زیرا نتایج تاس با داشتن دو نتیجه موفقیت (ظاهر شدن عدد ۴) با احتمال $p = \frac{1}{6}$ و شکست (ظاهر شدن سایر اعداد ۱، ۲، ۳، ۵، ۶) با احتمال $q = \frac{5}{6}$ به تعداد ۵ بار انجام می‌دهد است.
 $X \sim B(5, \frac{1}{6})$ متغیر تصادفی توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=5$ (تعداد پرتاب‌ها) و $p=\frac{1}{6}$ (احتمال ظهور عدد ۴) می‌باشد.

توزیع دوجمله‌ای: $f_X(n) = \binom{n}{n} p^n q^{n-n} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots, n$

توزیع دوجمله‌ای: $f_X(n) = \binom{5}{n} (\frac{1}{6})^n (\frac{5}{6})^{5-n} \quad n=0, 1, 2, 3, 4, 5$
 متغیر تصادفی X در ۵ بار پرتاب تاس متوالی

i) $P(X=3) = \binom{5}{3} (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3! \times 2! \times 1} \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36}$
 $= \frac{1 \times 25}{216 \times 36} = \frac{250}{7776} = 0.032$
 احتمال آنکه عدد ۴ دقیقاً ۳ بار ظاهر شود

ii) $P(X \leq 2) = \sum_{n=0}^2 f_X(n) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2)$ اصول اضافه کردن
 احتمال آنکه عدد ۴ حداکثر ۲ بار ظاهر شود
 تاس متوالی ۵ بار پرتاب شود
 $n=0$ هیچ بار ظاهر نشود
 $n=1$ یکبار ظاهر شود
 $n=2$ دوبار ظاهر شود

$$= \binom{5}{0} (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^{5-0} + \binom{5}{1} (\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^{5-1} + \binom{5}{2} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{5-2}$$

$$= 1 \times 1 \times (\frac{5}{6})^5 + 5 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^4 + \frac{5!}{2!3!} \times \frac{1}{36} \times (\frac{5}{6})^3$$

$$= \frac{3125}{7776} + \frac{5 \times 5^4}{6 \times 6^4} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3!} \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}$$

$$= \frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776} + \frac{250}{7776} = \frac{7500}{7776} = 0.9645$$

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=4$ و $p=\frac{1}{4}$ باشد. با استفاده از توزیع احتمال دوجمله‌ای محاسبه کنید

(i) $P(X=2)$ (ii) $P(X=0)$ (iii) $P(X \geq 3)$
 حل: $X \sim B(4, \frac{1}{4})$ متغیر تصادفی توزیع دوجمله‌ای با تعداد ۴ آزمایش متوالی و احتمال موفقیت $p=\frac{1}{4}$ است.

$f_X(n) = P(X=n) = \binom{n}{n} p^n q^{n-n} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots, n$
 $\rightarrow f_X(n) = \binom{4}{n} (\frac{1}{4})^n (\frac{3}{4})^{4-n} \quad n=0, 1, 2, 3, 4$
 $n=4$
 $p=\frac{1}{4}$
 $q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

i) $P(X=2) = \binom{4}{2} (\frac{1}{4})^2 (\frac{3}{4})^{4-2} = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{1}{4} = 0.2646$

ii) $P(X=0) = \binom{4}{0} (\frac{1}{4})^0 (\frac{3}{4})^{4-0} = 1 \times 1 \times 0.01 = 0.01$

iii) $P(X \geq 3) = \sum_{n=3}^4 f_X(n) = f_X(3) + f_X(4) = \binom{4}{3} (\frac{1}{4})^3 (\frac{3}{4})^{4-3} + \binom{4}{4} (\frac{1}{4})^4 (\frac{3}{4})^{4-4}$
 $= 4 \times 0.243 \times \frac{1}{4} + 1 \times 0.2401 \times 1 = 0.4116 + 0.2401 = 0.6517$
 تذکر: $\binom{n}{0}=1$
 $a^0=1$
 $n=3$ و $n=4$ بار پرتاب